Всероссийская студенческая олимпиада (Московский тур)
по физике (в технических вузах)
2015 г.

II тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 28 февраля 2015 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

Победители в командном зачете: команда Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, набравшая 158 баллов - первое место, команда Калужского филиала Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана набравшая 107 баллов - второе место, команда Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина, набравшая 70 баллов - третье место.
Победители в личном зачете: Черемушкин Вячеслав Андреевич МГТУ им. Н.Э. Баумана - первое место, Блудова Ольга Александровна МГТУ им. Н.Э. Баумана - второе место, Бланк Сергей Сергеевич МГТУ им. Н.Э. Баумана - третье место.

Задача 1. Две частицы на плоскости движутся из одной точки в одном направлении с одинаковой начальной скоростью v. На каждую из частиц действует постоянная по модулю F сила, лежащая в этой же плоскости, направленная нормально к траектории каждой из частицы. В начальный момент времени силы сонаправлены. Определить зависимость от времени длины отрезка l и его угловой скорости ω, соединяющего обе частицы, если массы частиц равны m и $2m$.
Задача 2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит неподвижно круглая пластина радиуса R массой M. По краю пластины начинает ползти жук со скоростью v. Для данного момента времени определить скорость жука в неподвижной системе отсчета и массу жука, если известно, что угловая скорость вращения жука относительно общего центра масс равна угловой скорости вращения пластины.
Задача 3. Очень длинная резиновая цилиндрическая оболочка при отсутствии избыточного давления имеет радиус r_0. Если избыточное давление внутри оболочки увеличить до p_0, то радиус оболочки увеличивается до R_0. Считая, что резина, из которой сделана оболочка, при любой степени растяжении подчиняется закону Гука $\frac{\Delta F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$, где ΔF - сила растяжения, Δl и l - удлинение и длина образца резины, E - модуль упругости. Определить максимальное избыточное давление, которое может выдержать данная оболочка, при условии, что длина оболочки $L>>R$ остается постоянной. Считать, что способность резины к растяжению неограниченна и объём резины при растяжении не меняется.
Задача 4. Одноатомный газ давлением p_0, объёмом V_0 и температурой T_0 находится в цилиндре под поршнем. Температура стенок цилиндра поддерживается постоянной и равна T_0. В результате перемещения поршня объём газа увеличился до $2V_0$, а его температура возросла до значения $2T_0$. Определить работу поршня над газом, если известно, что в газе происходили только адиабатический и изотермический процессы.
Задача 5. У тетраэдра из диэлектрика с ребром l две грани заряжены равномерно по поверхности положительным зарядом с поверхностной плотностью σ. Определить силу взаимодействия между гранями.
Задача 6. Тонкий плоский обруч радиуса R расположен в плоскости $z=0$ и заряжен равномерно по длине зарядом Q. В центре обруча находится частица массой m и зарядом $-q$. Определить период малых незатухающих гармонических колебаний, если частица двигается только вдоль оси z в отсутствии силы тяжести.
Задача 7. В начальный момент времени в однородном магнитном поле соленоида, индукция которого равна B_0, перпендикулярно ему движется частица массой m с зарядом q со

скоростью v_0. Определить закон изменения модуля скорости от времени *v(t)*, если магнитное поле начинает медленно меняться со скоростью $\alpha = \dfrac{dB}{dt} \ll \dfrac{qB^2}{m}$.

Задача 8. Электромагнитная волна является суперпозицией двух плоскополяризованных волн распространяющихся в одном направлении напряженность электрического поля которых имеет вид: $E_y=E_1\cos(\omega t+\varphi)$, $E_z=E_2\cos(\omega t)$. На пути волны установлен поляризатор. Определить угол между плоскостью его поляризации и осью y, при котором интенсивность прошедшей волны будет максимальной.

Решение задач

Решение задачи 1. $F = ma = m\dfrac{v^2}{R}$, $R = \dfrac{mv^2}{F}$ - радиус траектории первой частицы массой $2m$, для второй частицы массой m радиус равен $R/2$. Уравнение движения первой частицы относительно её центра O равен $r_1=R$, для второй относительно точки O $r_2=R\cos(\alpha)$.

Угловая скорость радиус векторов r_1 и r_2 одинакова и равна $\omega = \dfrac{V}{R} = \dfrac{F}{2mV}$.

$$l = R - R\cos\left(\alpha\right) = 2R\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin^2\left(\frac{Ft}{4mV}\right).$$

Решение задачи 2. Пусть скорость жука в неподвижной системе отсчета равна u, центр масс системы покоится, тогда скорость центра масс круглой пластины $u\dfrac{m}{M}$. Из закона сохранения импульса $um=MV_c$, где $V_c = u\dfrac{m}{M}$ - скорость центра масс круглой пластины. Расстояние от жука до центра масс системы $R\dfrac{M}{M+m}$, от центра масс системы до центра масс пластины $R\dfrac{M}{M+m}$. ω - угловая скорость жука и цента пластины вокруг центра масс системы, и угловая скорость самой пластины со знаком минус.

Из закона сохранения момента импульса:

$$mu\left(R\frac{M}{M+m}\right) + M\left(\frac{um}{M}\right)\left(R\frac{m}{M+m}\right) - \frac{1}{2}MR^2\omega = m\omega\left(R\frac{M}{M+m}\right)R - \frac{1}{2}MR^2\omega = 0$$

$$\left(m\frac{M}{M+m}\right) = \frac{1}{2}M,\ mM = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}Mm,\ mM = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}Mm,\ m = M.$$

$$u = R\left(\frac{M}{M+m}\right)\omega = \frac{R\omega}{2},\ V = u + u\frac{m}{M} + R\omega = u + u + 2u = 4u$$

Решение задачи 3. Считаем, что начальное сечение S_o, начальная длина l_o, при этом сила растяжения $F=0$. $\dfrac{dF}{S} = E\dfrac{dl}{l}$, $l_0S_0 = lS$, $\dfrac{dF}{l_0S_0} = E\dfrac{dl}{l^2}$, $F = ES_0l_0\left(\dfrac{1}{l_0} - \dfrac{1}{l}\right) = ES_0\dfrac{\Delta l}{l}$, $\dfrac{F}{S_0} = E\dfrac{\Delta l}{l}$.

Две тангенциальные силы растяжения оболочки $2F$ равны силе давления газа в поперечном сечении оболочки площадью $2RL$. $2F = 2rLp = 2ES_0\dfrac{\Delta l}{l} = 2ES_0\dfrac{r-r_0}{r}$,

$$rLp = ES_0\frac{r-r_0}{r} = EL\delta_0\frac{r-r_0}{r},\ p = E\delta_0\frac{r-r_0}{r^2},\ p_0 = E\delta_0\frac{R_0-r_0}{R_0^2},\ p = \frac{r-r_0}{r^2}\frac{R_0^2p_0}{R_0-r_0}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R_0^2p_0}{R_0-r_0}\frac{r^2-2r\left(r-r_0\right)}{r^4} = 0, r=r_0,\ \frac{dp}{dt} = \frac{R_0^2p_0}{R_0-r_0}\frac{r^2-2r\left(r-r_0\right)}{r^4} = 0,\ p_{\max} = \frac{R_0^2p_0}{4\left(R_0-r_0\right)}.$$

Решение задачи 4. Дополнительная энергия для совершения этого процесса может быть получена за счет теплоты в изотермическом процессе с температурой T_0 получаемой от стенок цилиндра при медленном расширении газа. Работа над газом при изотермическом расширении $A_1 = -\frac{m}{\mu} R T_0 \ln\frac{V_1}{V_0} = -p_0 V_0 \ln\frac{V_1}{V_0}$.

Посредством адиабатического сжатия газа от объёма V_1 до объема $2V_0$ можно изменить температуру от T_0 до $2T_0$: $T_0 V_1^{\gamma-1} = 2T_0 \left(2V_0\right)^{\gamma-1}$, $\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = 2^{\frac{5}{2}}$.

При адиабатическом сжатии $A_2 = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{3}{2} p_0 V_0$.Откуда $A = A_1 + A_2 = -p_0 V_0 \left(\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\right)$.

Решение задачи 5. Поток от каждой грани внутрь тетраэдра равен половине заряда грани и вытекает, распределяясь равномерно между тремя другими гранями в силу симметрии. $\Phi = \frac{q}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma \frac{\sqrt{3}}{4} l^2}{2\varepsilon_0} = 3\Phi_\Gamma$. Нормальная составляющая силы, действующая на плоскую пластину площадью S, заряженную равномерно поверхностной плотностью заряда σ равна: $F_n = \int E_n \sigma dS = \sigma \int E_n dS = \sigma \Phi_\Gamma = \frac{\sqrt{3}\sigma^2 l^2}{24\varepsilon_0}$, где Φ_Γ – поток вектора напряженности электрического поля через грань тетраэдра. Полная сила взаимодействия направлена по оси перпендикулярной плоскости симметрии, т.е. вдоль ребра, соединяющего свободные вершины заряженных граней. Тогда угол φ между нормалью к грани и ребром, есть угол между вектором силы и проекцией силы на нормаль $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $F = \frac{F_n}{\cos\varphi} = \frac{\sigma^2 l^2}{8\sqrt{2}\varepsilon_0}$

Решение задачи 6. Напряженность поля вдоль оси z:

$$E = \oint dE \sin\alpha = \oint \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{z}{R} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{z}{R}\oint dl = \frac{2\pi R\left(\frac{Q}{2\pi R}\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} z$$

Уравнение движения частицы: $m\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3} z = 0$, тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m R^3}{qQ}}$.

Решение задачи 7. $-\frac{d\Phi}{dt} = \oint E dl$, $\pi r^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi r E$, $E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$.

Заряд ускоряется в тангенциальном направлении $a = \frac{qE}{m} = \frac{qr}{2m}\frac{dB}{dt} = \frac{dv}{dt}$.

Радиус меняется медленно, поэтому $\frac{mv^2}{r} = qvB$, $\frac{1}{2B}\frac{dB}{dt} = \frac{dv}{vdt}$, $\ln\sqrt{\frac{B}{B_0}} = \ln\frac{v}{v_0}$, $v = v_0\sqrt{\frac{B_0 + \alpha t}{B_0}}$.

Решение задачи 8. Пусть плоскость поляризации волны под углом α к оси y. Тогда

$E = E_1 \cos(\alpha)\cos\left(\omega t + \varphi\right) + E_2 \sin\left(\alpha\right)\cos\left(\omega t\right)$,

$E_{\max}^2 = E_1^2 \cos^2(\alpha) + E_2^2 \sin^2\left(\alpha\right) + 2E_1 E_2 \cos\left(\alpha\right)\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\varphi\right)$,

$\frac{dE_{\max}^2}{d\alpha} = -2E_1^2 \cos(\alpha)\sin\left(\alpha\right) + 2E_2^2 \cos\left(\alpha\right)\sin\left(\alpha\right) + 2E_1 E_2 \cos\left(\varphi\right)\cos\left(2\alpha\right)$,

$\left(E_2^2 - E_1^2\right)\sin\left(2\alpha\right) + 2E_1 E_2 \cos\left(\varphi\right)\cos\left(2\alpha\right) = 0$, $tg\left(2\alpha\right) = \frac{2\cos\left(\varphi\right) E_1 E_2}{E_1^2 - E_2^2} = \frac{2\cos\left(\varphi\right)\frac{E_1}{E_2}}{\frac{E_1^2}{E_2^2} - 1}$