Всероссийская студенческая олимпиада (Московский тур)
по физике (в технических вузах)
2016 г.

II тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 27 февраля 2016 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

Победители в командном зачете: команда Национального исследовательского ядерного университета «МИФЙ», набравшая 223 балла - первое место, команда Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана набравшая 194 балла - второе место, команда Московского авиационного института, набравшая 168 баллов - третье место.
Победители в личном зачете: Гиниятуллин Булан Альбертович, НИЯУ МИФИ - первое место, Рогожинский Константин Сергеевич, МГТУ им. Н.Э. Баумана - первое место, Акимов Федор Александрович, МАИ – третье место.

Задачи олимпиады

Задача 1. Первая частица движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью v. Вторая частица догоняет первую, двигаясь по окружности с постоянной скоростью. Вторая частица в начальный момент времени находится от первой на расстоянии l под углом α к вектору скорости первой частицы в сторону от окружности радиуса r и движется таким образом, что в любой момент времени векторы скоростей обеих частиц параллельны друг другу. Определить радиус траектории R и скорость второй частицы u.

Задача 2. Космический корабль массы m двигается по эллиптической орбите вокруг планеты радиуса R, ускорение свободного падения на поверхности которой равно g. Минимальное расстояние до планеты равно R, а максимальное $4R$. Определить работу, которую должна совершить сила тяги реактивного двигателя корабля, чтобы он покинул поле тяготения планеты. Изменением массы корабля в процессе полета пренебречь.

Задача 3. Чаша, в которой находится стержень длины $l<R$, представляет собой гладкую полусферу радиуса R. Определить период малых колебаний стержня для двух случаев, когда колебания происходят вдоль стержня и поперек стержня.

Задача 4. Теплоизолированная система состоит из вертикально расположенного цилиндра, в котором под покоящимся поршнем массой M находится столб воздуха высотой h с температурой T_0. Сверху в цилиндре воздуха нет. Определить показатель политропного процесса n при сжатии столба воздуха внешней силой, действующей на поршень, считая, что процессы теплообмена воздуха с цилиндром и поршнем носят обратимый характер, а общая теплоемкость поршня и цилиндра равна c_0.

Задача 5. Оболочка воздушного шара имеет максимальный объем V_m. На земле шар заправляется гелием объёмом $V_0<V_m$ при нормальных условиях p_0,T_0. Масса оболочки вместе с грузом равна M. Определить, при каком объеме V_0 гелия высота подъёма шара будет максимальной, и найти эту высоту. Считать, что температура воздуха и температура гелия с высотой не меняется.

Задача 6. Определить потенциал на краю диска радиуса R, заряженного равномерно поверхностной плотностью заряда σ.

Задача 7. Плоский конденсатор, расстояние между обкладками которого равно d, расположен вертикально. К конденсатору приложено напряжение U плюсом к правой обкладке, по левой обкладке вверх, а по правой вниз, протекают токи одинаковой линейной плотности i. Между обкладками слева направо в поле силы тяжести движется положительно заряженная частица с постоянной скоростью v_0. Достигнув обкладки, частица вылетает из конденсатора через маленькое отверстие. Определить минимальную скорость частицы в процессе дальнейшего движения.

Задача 8. Знаменитый американский изобретатель (и бизнесмен средней руки) Томас Эльва Эдиссон около века тому назад провёл 2000 опытов, чтобы подобрать технические параметры электрической лампочки накаливания. Заметим, что теоретическая физика того времени позволяла рассчитать основные параметры этого устройства и уменьшить объём экспериментальной проверки во много раз. В 1890-х годах А.Н. Лодыгин изобретает несколько типов ламп с нитями накала из тугоплавких металлов. Лодыгин предложил применять в лампах нити из вольфрама и свивать их в спираль.

Нить лампочки накаливания – вольфрам как самый тугоплавкий металл. Температура плавления вольфрама равна приблизительно 3400°С. Рабочая температура может быть T = 2700°С. Пусть удельное сопротивление вольфрама при этой температуре равно ρ = $90{,}4\cdot 10^{-6}$ [Ом·см]. С квадратного метра нагретой поверхности абсолютно чёрного тела за одну секунду излучается в окружающее пространство (закон Стефана-Больцмана) энергия $W = 5{,}67\left(\frac{T}{100}\right)^4$ Дж, T – абсолютная температура (градусы Кельвина), для вольфрама $W = 5{,}67\varepsilon\left(\frac{T}{100}\right)^4$, где $\varepsilon \approx 0{,}3$ – степень черноты. Определить длину и диаметр вольфрамовой проволочки лампочки накаливания мощностью N = 100 Вт, которая должна работать под напряжением U = 220 В.

Решение задач

Решение задачи 1. Столкновение частиц, векторы скоростей которых параллельны, возможно, если траектории частиц, которыми в данном случае являются окружности, касаются друг друга. Образуется трапеция, основания которой перпендикулярны скоростям частиц u и v равны R и r. Одна боковая сторона равна l под углом α к высоте трапеции, другая боковая сторонам равна R-r. Из геометрических построений следует:

$(R-r-l\sin(\alpha))^2+(l\cos(\alpha))^2 = (R-r)^2$, откуда $R = r + \dfrac{l}{2\sin(\alpha)}$. Далее $\dfrac{u}{v} = \dfrac{r + \dfrac{l}{2\sin(\alpha)}}{r}$ и

$$u = v\left(1 + \frac{l}{2r\sin(\alpha)}\right).$$

Ответ: $R = r + \dfrac{l}{2\sin(\alpha)}, u = v\left(1 + \dfrac{l}{2r\sin(\alpha)}\right)$.

Решение задачи 2. Пусть V_1 – максимальная скорость, V_2 – минимальная скорость космического корабля на траектории, тогда из закона сохранения момента импульса $n = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = 4$. Из закона сохранения энергии $-g\dfrac{R^2}{R_1} + \dfrac{V_1^2}{2} = -g\dfrac{R^2}{R_2} + \dfrac{V_2^2}{2}$, где R_1 и R_2 – расстояния от корабля до центра планеты. $2g\dfrac{R^2}{R_1}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = V_1^2\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, откуда $V_1 = \sqrt{\dfrac{5}{7}gR}$.

Работа, которая позволит покинуть поле тяготения. $A = m\left(\dfrac{gR^2}{R_1} - \dfrac{v_1^2}{2}\right) = \dfrac{m}{2}\left(gR - \dfrac{5}{7}gR\right) = \dfrac{1}{7}mgR$.

Ответ: $A = \dfrac{1}{7}mgR$.

Решение задачи 3. Пусть расстояние от центра сферы до стержня равно a. Для колебаний вдоль стержня $R^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = a^2$, $I = ma^2 + \dfrac{1}{12}ml^2 = m\left(R^2 - \dfrac{1}{12}l^2\right)$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(R^2 - \frac{1}{6}l^2\right)}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 - \frac{1}{6}l^2}{g\sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}}.$$

Для колебаний поперек стержня $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{2}}}{g}}$.

Ответ: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^2 - \frac{1}{6}l^2}{g\sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{2}}}{g}}$.

Решение задачи 4. Условие равновесия поршня $Mg = pS$, $p = \dfrac{Mg}{S}$. Для воздуха под поршнем $phS = \nu RT_0$, $\nu = \dfrac{Mgh}{RT_0}$. Теплоемкость воздуха при постоянном объёме под цилиндром равна $C_1 = \dfrac{5R}{2}$. Молярная теплоемкость цилиндра, приведенная к воздуху $C_0 = \dfrac{c_0}{\nu} = \dfrac{c_0 RT_0}{Mgh}$. Теплоемкость политропы есть теплоемкость поршня и цилиндра взятая с обратным знаком $C = C_1 - \dfrac{R}{n-1} = -C_0$, $C_1 + C_0 = \dfrac{R}{n-1}$, $n = 1 + \dfrac{R}{C_0 + C_1} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{5}{2} + \dfrac{c_0 T_0}{Mgh}}$.

Ответ: $n = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{5}{2} + \dfrac{c_0 T_0}{Mgh}}$.

Решение задачи 5. Барометрическая формула $p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0}x}$,

подъемная сила $(\rho\text{-}\rho_{\mathrm{He}})Vg = (m\text{-}m_{\mathrm{He}})g = Mg$, $p_0 V_0 = pV = \dfrac{m_{He}}{\mu_{He}} RT_0$,

$\left(pV\mu - p_0 V_0 \mu_{He}\right)\dfrac{g}{RT} = \dfrac{gp_0V_0}{RT_0}\left(\mu - \mu_{He}\right) = Mg$, $V_0 = \dfrac{MRT_0}{p_0\left(\mu - \mu_{He}\right)}$.

Подъёмная сила постоянна до точки, когда оболочка шара полностью раскроется $p_0 V_0 = pV_m$,

$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0}x} = \dfrac{p_0 V_0}{V_m}$, $x = \dfrac{RT_0}{\mu g}\ln\dfrac{V_m}{V_0}$.

Ответ: $V_0 = \dfrac{MRT_0}{p_0\left(\mu - \mu_{He}\right)}$, $x = \dfrac{RT_0}{\mu g}\ln\dfrac{V_m}{V_0}$.

Решение задачи 6. Выделим из точки на краю диска элементарный угол $d\alpha$, под углом α к оси симметрии $d\varphi = \int\limits_0^{r_0} \dfrac{\sigma r d\alpha dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\sigma r_0}{4\pi\varepsilon_0} d\alpha$.

Полный потенциал $\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sigma r}{4\pi\varepsilon_0} d\alpha = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R\cos\alpha d\alpha = \dfrac{R\sigma}{\pi\varepsilon_0}$.

Ответ: $\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sigma r}{4\pi\varepsilon_0} d\alpha = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R\cos\alpha d\alpha = \dfrac{R\sigma}{\pi\varepsilon_0}$.

Решение задачи 7. Напряженность электрического поля в конденсаторе $E = \dfrac{U}{d}$, индукция магнитного поля $B = i\mu_0$. Для сохранения постоянства скорости в полях необходимо равенство всех сил, откуда из горизонтальной проекции $\sin\alpha = \dfrac{qE}{qv_0B}$, минимальная скорость

$$v = v_0\sqrt{1-\left(\sin\alpha\right)^2} = v_0\sqrt{1-\left(\frac{E}{v_0B}\right)^2} = v_0\sqrt{1-\left(\frac{U}{\mu_0 i v_0 d}\right)^2}\ .$$

Ответ: $v = v_0\sqrt{1-\left(\dfrac{U}{\mu_0 i v_0 d}\right)^2}$.

Решение задачи 8. Мощность излучения $N = \varepsilon 5,67\left(\dfrac{T^4}{100}\right)\pi dl = \dfrac{U^2}{R} = \dfrac{U^2}{\rho l}\pi\dfrac{d^2}{4}$, откуда $l = \dfrac{\pi U^2 d^2}{4N\rho}$. $d^3 = \dfrac{4\rho N^2 10^8}{5,67\varepsilon\pi^2 T^4 U^2} = \dfrac{4\cdot 90,4\cdot 10^{-8}\cdot 100^2\cdot 10^8}{5,67\cdot 0,3\cdot 3,14^2\cdot 2973^4 220^2} = 0,057\cdot 10^{-12}$, d = 0,385·10^{-4} м = 38,5 мкм., $l = \dfrac{\pi U^2 d^2}{4N\rho} = \dfrac{3,14\cdot 220^2\cdot\left(0,385\cdot 10^{-4}\right)^2}{4\cdot 100\cdot 90,4\cdot 10^{-8}} = 0,62$ м.

Ответ: d = 38,5 мкм, l = 0,62 м.