Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

М.Ю. Константинов

Решению задач по курсу общей физики

Раздел: «Принцип суперпозиции в квантовой механике»

Под редакцией Е.В. Смирнова

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Рецензент: *П.Н. Антонюк*

Константинов М.Ю.

Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Раздел: «Принцип суперпозиции в квантовой механике» / Под ред. Е.В. Смирнова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана

Дан краткий обзор основных понятий и соотношений теории, необходимых для решения задач по разделу «Принцип суперпозиции в квантовой механике». Изложена методика решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов II курса всех специальностей.

1. Принцип суперпозиции в квантовой механике

Обсуждаемый в настоящем пособии принцип суперпозиции является одним из основных принципов квантовой механики и связан с особенностями описания квантовых частиц и систем. Напомним, что в квантовой механике не существует понятия траектории частицы. Вместо него вводится понятие состояния, которое описывается волновой функцией $\Psi(\vec{r},t)$, квадрат модуля которой определяет плотность вероятности нахождения частицы в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. То есть величина $|\Psi|^2 dV$ есть вероятность того, что частица находится в элементе объема dV. Поскольку вероятность нахождения частицы во всём пространстве равна единице, то должно выполняться условие нормировки

$$\int \Psi^* \Psi dV = 1, \qquad (1)$$

где интегрирование ведётся по всей области, где может быть локализована частица, а символ «*» означает комплексное сопряжение.

Волновые функции, удовлетворяющие условию (1), называются ***нормированными***[1].

Использование для описания квантовых частиц и систем волновой функции $\Psi(\vec{r},t)$, вместо имеющего физический смысл квадрата ее модуля, связано с выполнением принципа суперпозиции состояний, который формулируется следующим образом: ***суперпозиция состояний квантовомеханической системы также является состоянием этой же системы***.

Это означает, что если Ψ_1 и Ψ_2 - нормированные волновые функции, описывающие разные состояния одной и той же частицы или системы, то линейная комбинация этих функций, то есть волновой функцией

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2, \qquad (2)$$

[1] В некоторых случаях, например, в случае инфинитного движения, вместо условия (1) используется нормировка на δ-функцию, либо ненормированные волновые функции. Эти случаи здесь не рассматриваются.

тоже является волновой функцией, описывающей некоторое состояние той же самой частицы которое называется суперпозицией состояний, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2. Например, волновая функция

$$\Psi(x,t) = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - p_1 x)} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t + p_2 x)}$$

является суперпозицией двух плоских волн де Бройля, распространяющихся вдоль оси x во взаимно противоположных направлениях.

Из условия нормировки волновой функции Ψ вытекает условие, которому должны удовлетворять коэффициенты c_1 и c_2:

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_2^* c_1 \int \Psi_2^* \Psi_1 dV + c_1^* c_2 \int \Psi_1^* \Psi_2 dV = 1, \tag{3}$$

причем в общем случае состояния, описываемые волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 не ортогональны, то есть

$$\int \Psi_2^* \Psi_1 dV \neq 0.$$

При этом коэффициенты c_1 и c_2 в разложении (2) не имеют определённого физического смысла. В важном частном случае, когда состояния, описываемые волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, ***ортогональны***, а сами волновые функции Ψ_1 и Ψ_2, соответствующие этим состояниям, ***ортонормированны***, то есть удовлетворяют условиям

$$\int \Psi_1^* \Psi_1 dV = \int \Psi_2^* \Psi_2 dV = 1; \qquad \int \Psi_2^* \Psi_1 dV = \int \Psi_1^* \Psi_2 dV = 0,$$

то коэффициенты c_1 и c_2 приобретают простой физический смысл. Действительно, умножая в этом случае равенство

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$$

слева на Ψ_i^*, и произведя интегрирование, получим:

$$\int \Psi_i^* \Psi dV = c_i^* c_i \int \Psi_i^* \Psi_i dV = c_i^* c_i = |c_i|^2, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Поэтому условие нормировки (1) примет вид

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \tag{5}$$

а коэффициенты c_1 и c_2 разложения (2) выражаются равенством

$$c_i = \int \Psi_i^* \Psi dV, \qquad i = 1, 2.$$

Учитывая вероятностную интерпретацию волновой функции, приходим к следующему выводу: в случае ортонормированных волновых функций Ψ_1 и Ψ_2, квадрат модуля коэффициента c_i есть вероятность того, что частица, находящаяся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ, будет обнаружена в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ_i.

Соотношения, аналогичные соотношениям (2)-(5) для двух состояний, справедливы и для произвольного числа состояний N, включая случай $N \to \infty$:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} c_i \Psi_i , \tag{6}$$

где Ψ_i нормированные волновые функции, описывающие различные состояния частицы, а условие нормировки (3) примет вид

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_i^* c_k \int \Psi_i^* \Psi_k dV = 1. \tag{7}$$

Если система волновых функций Ψ_i ортонормированна, то есть если

$$\int \Psi_m^* \Psi_n^* dV = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & при \quad m = n, \\ 0, & при \quad m \neq n, \end{cases} \tag{8}$$

то коэффициенты c_i разложения (6) определяются равенствами

$$c_n = \int \Psi_n^* \Psi dV , \tag{9}$$

а квадраты их модулей $|c_n|^2$ определяют вероятности обнаружения частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ, в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_n.

Принцип суперпозиции позволяет ввести понятие независимости состояний: состояния частицы называются независимыми, если описывающая их система волновых функций $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$ является независимой, то есть, если равенство

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \Psi_i = 0 \tag{10}$$

выполняется в том и только в том случае, когда все коэффициенты c_i равны нулю, или, другими словами, если ни одна из волновых функций $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$ не является линейной комбинацией остальных.

Соотношения (9)-(10) аналогичны соответствующим равенствам для векторов конечномерного евклидова пространства. Поэтому, множество состояний квантовой частицы можно рассматривать как векторное пространство (в общем случае бесконечномерное), элементами (векторами) которого являются нормированные волновые функции, а скалярное произведение определяется интегралом

$$(\Psi_i, \Psi_k) = \int \Psi_i^* \Psi_k dV . \tag{11}$$

Вместе с тем, имеется одно принципиальное отличие пространства волновых функций от обычного векторного пространства, благодаря которому принцип суперпозиции квантовой механики существенным образом отличается от принципа суперпозиции классической физики. А именно, в случае обычных векторных пространств, умножение произвольного ненулевого вектора $\vec{u}$ на число $\alpha \neq 1$ даёт новый вектор $\alpha\vec{u} \neq \vec{u}$. Например, если $\vec{r}$ - радиус-вектор, определяющий положение частицы, то векторы $\vec{r}$ и $\alpha\vec{r}$, где $\alpha = \text{const} \neq 1$, определяют разные положения частицы, то есть разные её состояния. Аналогично, векторы напряжённости $\vec{E}$, $\alpha\vec{E}$ и $\alpha\vec{E} + \beta\vec{E} = (\alpha + \beta)\vec{E}$ характеризуют разные электростатические поля или разные состояния электростатического поля.

В квантовой механике, в отличие от классической, ***волновые функции*** $\Psi(x,t)$ ***и*** $\alpha\Psi(x,t)$ ***характеризуют одно и то же состояние частицы или системы***. Поэтому множество волновых функций разбивается на классы эквивалентности, образованные волновыми функциями вида $\alpha\Psi$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел[2].

Из принципа суперпозиции следует, что все уравнения, описывающие состояние квантовых частиц или систем должны быть линейными. Обратное неверно, поскольку не любое решение уравнения Шредингера описывает какое-либо состояние квантовой частицы или системы частиц. Например, если волновые функции $\Psi_1(x_1,t)$ и $\Psi_2(x_2,t)$ описывают состояния двух тождественных частиц (например, двух электронов), то функция $\Psi = \Psi_1(x_1,t)\Psi_2(x_2,t)$ является решением уравнения Шредингера для двух невзаимодействующих тождественных частиц, но не описывает какого-либо состояния системы этих частиц. Действительно, системы частиц описываются либо симметричными (бозоны), либо антисимметричными функциями (фермионы), тогда как функция Ψ не является ни симметричной, ни антисимметричной.

Одним из экспериментальных подтверждений справедливости принципа суперпозиции являются опыты по дифракции частиц.

Для того чтобы иметь возможность применять принцип суперпозиции к конкретным физическим задачам, необходимо иметь возможность находить полные системы ортонормальных волновых функций (состояний), по которым будет раскладываться исследуемая волновая функция.

Напомним, что система волновых функций $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n, ...$ называется ***полной,*** если произвольная волновая функция частицы Ψ может быть представлена в виде суперпозиции вида (6) волновых функций данной системы.

Построение полных систем ортонормированных волновых функций основано на одном из принципов квантовой механики, сформулированном в работах М. Борна, П. Дирака и других учёных, утверждающем, что ***каждой физической величине*** f ***соответствует оператор этой физической ве-***

[2] В математике пространства, элементы которых u и αu при $u \neq 0, \alpha \neq 1$ эквивалентны, называются проек-

личины, обозначаемый $\hat{F}$ и переводящий волновую функцию Ψ в волновую функцию $\left(\hat{F}\Psi\right)$.

Оператор $\hat{F}$ определяется так, чтобы среднее значение $\overline{f}$ физической величины f выражалось равенством

$$\overline{f} = \int \Psi^* \left(\hat{F}\Psi\right) dV . \tag{12}$$

Линейность этого выражения как по Ψ, так и по Ψ^* означает, что сам оператор $\hat{F}$ должен быть ***линейным,*** то есть

$$\hat{F}\left(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2\right) = c_1\hat{F}\Psi_1 + c_2\hat{F}\Psi_2 ,$$

где Ψ_1 и Ψ_2 - произвольные функции, а c_1 и c_2 - некоторые постоянные.

Ограничимся, для простоты, случаем, когда величина f имеет ***дискретный спектр***, то есть когда она может принимать конечное или счетное множество значений $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, называемых собственными значениями физической величины f. Обозначим волновую функцию частицы в состоянии, в котором $f = f_n$ посредством Ψ_n. Волновые функции Ψ_n называются собственными функциями физической величины f.

Если волновой функцией Ψ является одна из собственных функций Ψ_n, то среднее значение $\overline{f}$ величины f совпадает со значением f_n, которое величина f имеет в этом состоянии

$$\overline{f} = \int \Psi_n^* \left(\hat{F}\Psi_n\right) dV = f_n .$$

Из этого равенства следует

$$\hat{F}\Psi_n = f_n \Psi_n ,$$

т.е. в результате действия оператора $\hat{F}$ собственная функция Ψ_n умножается на соответствующее собственное значение f_n.

Таким образом, собственные функции данной физической величины f

---

тивными пространствами.

являются решениями уравнения

$$\hat{F}\Psi = f\Psi , \qquad (13)$$

а собственные значения – значения f, при которых написанное уравнение имеет решения, удовлетворяющие требуемым условиям.

Вид операторов для различных физических величин может быть установлен из физических соображений, а полученное уравнение дает возможность находить собственные функции и собственные значения.

Можно показать, что если собственные функции Ψ_n оператора $\hat{F}$ нормированы, то система собственных функций Ψ_n образует ***полную систему ортонормированных*** функций, то есть произвольная волновая функция частицы может быть представлена в виде суперпозиции (6) собственных функций Ψ_n оператора $\hat{F}$

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n ,$$

где коэффициенты разложения определяются равенством

$$c_n = \int \Psi_n^* \Psi dV ,$$

где Ψ_n - собственные функции оператора $\hat{F}$, соответствующего физической величине f.

Представляя произвольную волновую функцию в виде разложения (6) и пользуясь равенствами (11)-(13), получаем

$$\bar{f} = \int \Psi^* \left(\hat{F}\Psi \right) dV = \int \left(\sum_m c_m^* \Psi_m^* \right) \hat{F} \left(\sum_n c_n \Psi_n \right) dV =$$

$$= \int \sum_{m,n} c_m^* c_n f_n \Psi_m^* \Psi_n dV = \sum_{m,n} c_m^* c_n f_n = \sum_n \left| c_n \right|^2 f_n .$$

Таким образом, физический смысл коэффициентов c_n разложения (6) состоит в том, что квадраты их модулей, во-первых, определяют вероятности нахождения частицы с волновой функцией Ψ в состоянии, в котором физическая величина f имеет значение f_n, и, во-вторых, вероятности появления этих значений при измерении. Другими словами, измерение физической величины f в состоянии, описываемом волновой функцией (6а) с вероятностью $|c_n|^2$ даст значение f_n.

Принцип суперпозиции позволяет решать многие задачи квантовой механики и упрощать их решение. В частности, принцип суперпозиции является мощным инструментом построения решений уравнения Шредингера. Разложение волновых функций состояний частицы по собственным функциям операторов физических величин даёт возможность представить эти состояния в виде суперпозиции состояний, в которых эти величины имеют определённые значения, т.е. дать их физическую интерпретацию и установить возможные результаты измерения величин и вероятности их появления.

2. Примеры решения задач.

Задача 1. Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками, т.е. в потенциальном поле с потенциальной энергией

$$U = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a, \\ \infty & x < 0, \quad x > a. \end{cases} \tag{14}$$

В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы имеет вид

$$\Psi(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} Ax(a-x), & 0 < x < a, \\ 0, & x < 0, \ x > a. \end{cases} \tag{15}$$

Требуется найти волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$, возможные результаты измерения энергии частицы и вероятности их появления, а также вероятность обнаружения частицы в основном и в двух первых возбуждённых состояниях.

Решение.

В нерелятивистской квантовой механике волновые функции, определяющие состояние квантовой частицы (системы), являются решениями уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi\,, \tag{16}$$

где $\hat{H}$ - оператор Гамильтона, имеющий для отдельной частицы вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r},t)\,, \tag{17}$$

где Δ - оператор Лапласа, который в прямоугольной декартовой системе координат определяется равенством

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{18}$$

а $U(\vec{r},t)$ - потенциальная энергия частицы, являющаяся, в общем случае, функцией координат и времени. В рассматриваемой задаче $U(\vec{r},t) \equiv 0$ при $0 < x < a$ и обращается в бесконечность при $x < 0$ и $x > a$. Поэтому начальное условие (15) должно быть дополнено граничными условиями

$$\Psi(0,t) = \Psi(a,t) = 0\,,$$

вытекающими из условия непрерывности волновой функции.

Поскольку в рассматриваемой задаче потенциал не зависит от времени, то в потенциальной яме существуют стационарные состояния, то есть состояния, в которых частица определенные значения энергии. Поэтому, в силу принципа суперпозиции, любая волновая функция, описывающая состояние частицы в потенциальной яме, может быть разложена по собственным функциям стационарных состояний, то есть по собственным функциям оператора энергии. Волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальной яме имеют вид

$$\Psi_n(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(x)\,, \tag{20}$$

где функции $\psi_n(x)$ являются решениями одномерного стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$$

или

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E_n\psi_n=0\,.$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие граничным условиям

$$\psi(0)=\psi(a)=0 \tag{21}$$

и условию нормировки

$$\int_0^a|\psi_n|^2(x)\,dx=1 \tag{22}$$

имеют вид

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi nx}{a}, \tag{23}$$

а соответствующие им значения энергии определяются равенством

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2\,. \tag{24}$$

Волновые функции (23) ортонормированны, то

$$\int_0^a\Psi_k^*\Psi_l\,dx=\int_0^a\psi_k^*\psi_l\,dx=\delta_{kl}\,,$$

где δ_{kl} есть символы Кронекера, и образуют полную систему волновых функций.

Таким образом, согласно принципу суперпозиции, произвольную волновую функцию $\Psi(x,t)$, описывающую состояние частицы в яме, можно представить следующим образом

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}\sin\frac{\pi nx}{a}, \tag{25}$$

где значения энергии E_n определены равенствами (24).

Чтобы найти коэффициенты c_n разложения (25), заметим, что при $t=0$ волновая функция (25) равна

$$\Psi(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x).$$

где функция $\psi(x)$ - определяется равенствами (15).

Таким образом, коэффициенты c_n разложения (25), совпадают с коэффициентами разложения функции $\psi(x)=\Psi(x,0)$ по собственным функциям $\psi_n(x)$ оператора Гамильтона (23).

Прежде всего, из условия нормировки найдем коэффициент A в равенстве (15)

$$1=\int_0^a\psi^2(x)\,dx=A^2\int_0^a x^2(a-x)^2\,dx=\frac{A^2a^5}{30},$$

откуда

$$A=-\frac{\sqrt{30}}{a^{5/2}}.$$

Знак минус выбран для того, чтобы функция $\psi(x)=\Psi(x,0)$ была положительной.

Далее, с помощью равенства (9) найдём коэффициенты c_n разложения (25),

$$c_n=\int_0^{2a}\psi_n(x)\psi(x)\,dx=-\frac{\sqrt{30}}{a^{5/2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{2a}(x-a)\sin\frac{\pi nx}{2a}\,dx=\frac{4\sqrt{15}\left(1-\cos\pi n\right)}{\pi^3n^3}.$$

Из полученной формулы следует, что

$$c_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8\sqrt{15}}{\pi^3n^3}, & n=2k+1,\end{cases}$$

то есть в разложении (25) присутствуют волновые функции только нечетных энергетических уровней стационарных состояний.

Таким образом, волновая функция $\Psi(x,t)$ может быть представлена в виде следующей суперпозиции волновых функций стационарных состояний

$$\Psi(x,t)=\frac{8\sqrt{30}}{\pi^3\sqrt{a}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k+1}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}=\frac{8\sqrt{30}}{\pi^3\sqrt{a}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k+1}t}\psi_{2k+1},$$

откуда следует, что измерение энергии частицы с вероятностью $P_{2k+1}=c_{2k+1}^2=\frac{960}{\left[\pi(2k+1)\right]^6}$ даст значение

$$E_{2k+1}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(2k+1)^2,$$

где $k=0,1,2,...$. В частности, вероятность обнаружения частицы в основном состоянии $(k=0, n=1)$ равна $P_1=0.998555$, в первом возбуждённом состоянии $(n=2)$ - $P_2=0$, а во втором возбуждённом состоянии $(k=1, n=3)$ - $P_3=0.0014$.

Задача 2. В момент времени $t=t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками равна

$$\Psi(x,0)=\psi(x)=A\sin\frac{3\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{2l}. \quad (26)$$

Написать выражение для волновой функции частицы $\Psi(x,t)$, найти среднюю энергию частицы и вероятность её обнаружения в первом возбуждённом состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

Решение. Как и при решении задачи 1, будем искать решение в виде разложения вида (25). С этой целью, пользуясь известными тригонометрическими формулами

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \quad (27)$$

и

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right], \quad (28)$$

преобразуем заданную волновую функцию $\psi(x)$ к виду:

$$\psi(x)=\frac{A}{4}\left[\sin\frac{3\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l}+\sin\frac{\pi x}{l}\right].$$

Постоянный множитель A находим из условия нормировки:

$$1=\int_0^l|\psi(x)|^2\,dx=\frac{A^2}{16}\int_0^l\left[\sin^2\frac{3\pi x}{l}+\sin^2\frac{2\pi x}{l}+\sin^2\frac{\pi x}{l}\right]dx=\frac{A^2}{16}\frac{3l}{2},$$

откуда

$$A=4\sqrt{\frac{2}{3l}}$$

Здесь мы учли свойство ортогональности тригонометрических функций, состоящее в том, что при любых целых значениях k и n справедливо равенство:

$$\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx=\delta_{kn}=\begin{cases}0 & k\neq n,\\ 1 & k=n.\end{cases}\tag{29}$$

Таким образом, функция $\psi(x)$ принимает следующий окончательный вид

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{3l}}\left(\sin\frac{3\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l}+\sin\frac{\pi x}{l}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\psi_1(x)+\psi_2(x)+\psi_3(x)\right],$$

где $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi nx}{l}$ - волновые функции стационарных состояний.

В силу ортонормированности волновых функций ψ_n, вероятность обнаружения частицы в состоянии с волновой функцией ψ_n равна квадрату коэффициента при ψ_n. Поскольку коэффициенты разложения волновой функции ψ по волновым функциям ψ_n стационарных состояний совпадают, то состояние частицы в яме представляет собой равновероятную суперпозицию основного ($n=1$) и двух первых возбужденных состояний ($n=2,3$). Вероятность обнаружения частицы в каждом из этих состояний одинакова и равна

$$P_n=P=\frac{1}{3}.\tag{30}$$

Далее, учитывая, что волновая функция стационарного состояния равна

$$\Psi_n(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(x),$$

где $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$ - энергия состояния, m - масса частицы, получим окончательное выражение для волновой функции $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\psi_1(x) + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\psi_2(x) + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\psi_3(x)\right]. \tag{31}$$

Таким образом, при измерении энергии частицы с вероятностью $1/3$ может быть получено одно из значений E_n $(n = 1, 2, 3)$. Поэтому среднее значение энергии равно

$$\langle E\rangle = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3) = \frac{1}{3}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = \frac{13}{3}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}. \tag{32}$$

Поскольку в рассматриваемом состоянии энергия частицы не имеет определенного значения, то состояние частицы не является стационарным.

Равенства (30)-(32) дают полное решение задачи.

Задача 3. Определить результаты измерения проекции импульса L_z и вероятности их выпадения для системы, находящейся в состоянии с волновой функцией

$$\psi(\varphi) = A(1 + \cos\varphi \cdot \cos 2\varphi), \tag{33}$$

где φ - азимутальный угол, A - некоторая константа.

Решение. Используя тригонометрическое тождество (27), перепишем волновую функцию (33) в виде

$$\psi(\varphi) = A\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 3\varphi\right). \tag{34}$$

Значение постоянной A найдем из условия нормировки

$$
1=\int_0^{2\pi}|\psi|^2\,d\varphi=A^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi=
$$

$$
=A^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{4}\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\cos^2 3\varphi\right)d\varphi=\frac{5}{2}A^2\pi.
$$

Здесь, как и в задаче 2, мы воспользовались свойством ортогональности тригонометрических функций (29).

Таким образом,

$$
A=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\,.
$$

Далее, чтобы представить волновую функцию $\psi(\varphi)$ в виде разложения по собственным функциям оператора $\hat{L}_z=-i\hbar\partial/\partial\varphi$, имеющим вид $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}L_z\varphi}$, используем известную формулу

$$
\cos\alpha=\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2},
$$

Применение которой к (34) даёт

$$
\psi=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{-i\varphi}\right)+\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{i3\varphi}+\mathrm{e}^{-i3\varphi}\right)\right]=\sqrt{\frac{4}{5}}\left[\psi_0+\frac{1}{4}(\psi_1+\psi_{-1})+\frac{1}{4}(\psi_3+\psi_{-3})\right].
$$

Таким образом, в результате измерения проекции импульса L_z может быть получено значение $L_z=0$ с вероятностью $P_0=4/5$, и значения $\pm\hbar$ и $\pm 3\hbar$ с вероятностями $1/20$ каждое. Легко убедиться, что сумма вероятностей, как и должно быть, равна единице.

Задача 4. В момент времени $t=t_0$ волновая функция частицы массы m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$
\psi=C\psi_1+C\psi_s\,,
$$

где C - некоторая константа; ψ_1 - волновая функция основного состояния; ψ_s - равновероятная суперпозиция основного и второго возбуждённого состояний.

Найти волновую функцию $\Psi(x,t)$, среднее значение энергии частицы в данном состоянии и вероятности обнаружения частицы в основном и во втором возбужденном состояниях.

Решение. Согласно условию, ψ_s есть равновероятная суперпозиция основного и второго возбужденного состояний, т.е.

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_3),$$

где волновые функции основного ($n=1$) и второго возбужденного ($n=3$) состояний равны соответственно

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad \text{и} \qquad \psi_3 = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{3\pi x}{l}.$$

Поэтому,

$$\psi = C\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3\right).$$

Постоянную C найдем из условия, что вероятность нахождения частицы в одном из указанных в условии состояний равна единице.

В силу ортонормированности волновых функций ψ_1 и ψ_3 получим:

$$1 = C^2\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = C^2\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(2+\sqrt{2}\right)C^2,$$

откуда

$$C = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Таким образом, исходная волновая функция $\psi(x)$ равна

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3\right) = \frac{1}{\sqrt{l\left(2+\sqrt{2}\right)}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\sin\frac{\pi x}{l} + \sin\frac{3\pi x}{l}\right),$$

а волновая функция $\Psi\left(x,t\right)$ равна

$$\Psi\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{l\left(2+\sqrt{2}\right)}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}E_1 t}\sin\frac{\pi x}{l} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}E_3 t}\sin\frac{3\pi x}{l}\right),$$

где $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$, $n = 1, 3$.

Вероятности обнаружения частицы в основном и во втором возбужденном состояниях равны соответственно

$$P_1 = (3+2\sqrt{2})/\left(4+2\sqrt{2}\right) \approx 0.85$$

и

$$P_3 = 1/\left(4+2\sqrt{2}\right) \approx 0.15,$$

а среднее значение энергии частицы равно

$$\left\langle E\right\rangle = P_1E_1 + P_3E_3 = \frac{6+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \approx 2.17E_1.$$

3. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме шириной $3a$ с бесконечно высокими стенками. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы имеет вид

$$\Psi(x,0) = \psi\left(x\right) = \begin{cases} Ax\left(x-2a\right)\left(x-3a\right), & 0 < x < 3a, \\ 0, & x < 0,\ x > 3a. \end{cases}$$

Требуется найти волновую функцию частицы $\Psi\left(x,t\right)$, возможные результаты измерения энергии частицы и вероятности их появления, а также вероятность обнаружения частицы в основном и в двух первых возбуждённых состояниях.

Ответ: $\Psi\left(x,t\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{105}\left(5+4(-1)^{n}\right)}{\pi^{3}n^{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n}t}\sqrt{\frac{2}{3a}}\sin\frac{\pi nx}{3a}$; $E_{n}=\frac{\pi^{2}\hbar^{2}}{18ma^{2}}n^{2}$;

$P_{n}=\frac{420\left(5+4(-1)^{n}\right)^{2}}{\pi^{6}n^{6}}$; $P_{1}\simeq 0.4369$; $P_{2}\simeq 0.5529$; $P_{3}\simeq 0.0006$.

Задача 2. Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме шириной $3a$ с бесконечно высокими стенками. В момент времени $t=0$ волновая функция частицы имеет вид

$$\Psi(x,0)=\psi\left(x\right)=\begin{cases}Ax\left(x-a\right)\left(x-3a\right), & 0<x<3a,\\ 0, & x<0,\ x>3a.\end{cases}$$

Требуется найти волновую функцию частицы $\Psi\left(x,t\right)$, возможные результаты измерения энергии частицы и вероятности их появления, а также вероятность обнаружения частицы в основном и в двух первых возбуждённых состояниях.

Ответ: $\Psi\left(x,t\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{105}\left(4+5(-1)^{n}\right)}{\pi^{3}n^{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n}t}\sqrt{\frac{2}{3a}}\sin\frac{\pi nx}{3a}$; E_{n} и P_{n} те же, что и в предыдущей задаче.

Задача 3. В момент времени $t=t_{0}$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x)=A\sin\frac{5\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{2l}.$$

Суперпозицией каких состояний является данное состояние? Найти волновую функцию частицы $\Psi\left(x,t\right)$, среднюю энергию частицы, возможные результаты измерения энергии и вероятности их получения. Является ли состояние частицы стационарным?

Ответ: Данное состояние является равновероятной суперпозицией основного состояния и трёх первых возбуждённых состояний;

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{2l}}\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_1(t-t_0)}\sin\frac{\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_0)}\sin\frac{2\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_3(t-t_0)}\sin\frac{3\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_4(t-t_0)}\sin\frac{4\pi x}{l}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_1(t-t_0)}\psi_1(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_0)}\psi_2(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_3(t-t_0)}\psi_3(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_4(t-t_0)}\psi_4(x)\right\},\quad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}n^2,$$

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi nx}{l};\ \left\langle E\right\rangle=\frac{1}{4}\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=\frac{29}{4}\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2};\ \ P_1=P_2=P_3=P_4=\frac{1}{4}.$$

Данное состояние не является стационарным.

Задача 4. В момент времени $t=t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x)=A\sin\frac{9\pi x}{2l}\cos\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi x}{2l}.$$

Суперпозицией каких состояний является данное состояние? Найти волновую функцию частицы $\Psi\left(x,t\right)$, среднее значение импульса частицы и вероятность её обнаружения в каждом из состояний. Является ли состояние частицы стационарным?

Ответ: Данное состояние является равновероятной суперпозицией второго, пятого и восьмого возбуждённых состояний.

$$\Psi\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{2}{3l}}\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_3(t-t_0)}\sin\frac{3\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_6(t-t_0)}\sin\frac{6\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_9(t-t_0)}\sin\frac{9\pi x}{l}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_3(t-t_0)}\psi_3(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_6(t-t_0)}\psi_6(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_9(t-t_0)}\psi_9(x)\right\},\quad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}n^2,\quad P_3=P_6=P_9=\frac{1}{3};$$

$\left\langle E\right\rangle=43\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}$. Данное состояние не является стационарным.

Задача 5. В момент времени $t=t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x)=A\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}.$$

Суперпозицией каких состояний является данное состояние? Найти волновую функцию частицы $\Psi\left(x,t\right)$, среднее значение энергии частицы, возможные результаты измерения энергии и вероятности их получения. Является ли состояние частицы стационарным?

Ответ: Данное состояние является равновероятной суперпозицией первого, третьего и пятого возбуждённых состояний.

$$\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{3l}}\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_0)}\sin\frac{2\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_4(t-t_0)}\sin\frac{4\pi x}{l}+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_6(t-t_0)}\sin\frac{6\pi x}{l}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_0)}\psi_2(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_4(t-t_0)}\psi_4(x)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_6(t-t_0)}\psi_6(x)\right\},\quad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}n^2,\quad P_3=P_6=P_9=\frac{1}{3};$$

$\langle E\rangle=\frac{56}{3}\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}$. Данное состояние не является стационарным.

Задача 6. В момент времени $t=t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi=C\psi_a+C\psi_b,$$

где C - некоторая константа, ψ_a - волновая функция, описывающая равновероятную суперпозицию основного и первого возбужденного состояния, а ψ_b - волновая функция, описывающая равновероятную суперпозицию основного и второго возбуждённого состояния.

Найти волновую функцию $\Psi(x,t)$, среднее значение энергии частицы в данном состоянии, возможные результаты измерения энергии частицы и их вероятности.

Ответ: $\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_1(t-t_0)}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_0)}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_3(t-t_0)}\psi_3(x),\qquad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}n^2,$

$$P_1=\frac{2}{3},\quad P_2=P_3=\frac{1}{6};\qquad \langle E\rangle=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}\left(\frac{2}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{6}\cdot 2^2+\frac{1}{6}\cdot 3^2\right)=\frac{17}{6}\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}.$$

Задача 7. В момент времени $t=t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi=C\psi_a+C\psi_b,$$

где C - некоторая константа, ψ_a - волновая функция, описывающая равновероятную суперпозицию основного и первого возбужденного состояния, а ψ_b - волновая функция, описывающая равновероятную суперпозицию первого и третьего возбуждённого состояния.

Найти волновую функцию $\Psi(x,t)$, среднее значение энергии частицы в данном состоянии, возможные результаты измерения энергии частицы и их вероятности.

Ответ: $\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_1(t-t_0)}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_0)}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_4(t-t_0)}\psi_4(x),\qquad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}n^2,$

$P_1=\frac{2}{3},\quad P_2=P_4=\frac{1}{6};\qquad \langle E\rangle=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}\left(\frac{2}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{6}\cdot 2^2+\frac{1}{6}\cdot 4^2\right)=4\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^2l^2}.$

Задача 8. Определить результаты измерения проекции импульса L_z и вероятности их выпадения для системы, находящейся в состоянии с волновой функцией

$$\psi(\varphi)=A\left(1+\cos\varphi\cdot\cos 2\varphi\cdot\sin 3\varphi\right),$$

где φ - азимутальный угол, A - некоторая константа.

Ответ: $\psi=4\sqrt{\frac{2}{35}}\left\{\psi_0+\frac{1}{8i}(\psi_1-\psi_{-1})+\frac{1}{8i}(\psi_4-\psi_{-4})+\frac{1}{8i}(\psi_6-\psi_{-6})\right\},\qquad L_z=m\hbar,$

$m=0,\pm 1,\pm 4,\pm 6;\qquad P_0=\frac{32}{35};\quad P_{\pm 1}=P_{\pm 4}=P_{\pm 6}=\frac{1}{70}.$

Задача 9. Определить результаты измерения проекции импульса L_z и вероятности их выпадения для системы, находящейся в состоянии с волновой функцией

$$\psi(\varphi)=A\left(1+\cos\varphi\cdot\cos 3\varphi\cdot\sin 4\varphi\right),$$

где φ - азимутальный угол, A - некоторая константа.

Ответ: $\psi=4\sqrt{\frac{2}{35}}\left\{\psi_0+\frac{1}{8i}(\psi_2-\psi_{-2})+\frac{1}{8i}(\psi_6-\psi_{-6})+\frac{1}{8i}(\psi_8-\psi_{-8})\right\},\qquad L_z=m\hbar,$

$m=0,\pm 2,\pm 6,\pm 8;\qquad P_0=\frac{32}{35};\quad P_{\pm 2}=P_{\pm 6}=P_{\pm 8}=\frac{1}{70}.$

Задача 10. В момент времени $t = t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками равна

$$\psi(x) = Ax\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Найти волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$, средние значения энергии и координаты частицы, возможные результаты измерения энергии и вероятности их получения, а также вероятность обнаружения частицы в n – м возбужденном состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

Ответ: $\Psi(x,t) = -\pi\sqrt{\dfrac{3}{4\pi^2-6}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi x}{l} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{16k}{\left(4k^2-1\right)^2\pi}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi^2-3}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k}t}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{2\pi kx}{l}$;

$\langle x\rangle = \dfrac{3l\left(\pi^2-3\right)}{4\pi^2-6}$; $\langle E\rangle = \dfrac{\pi^2\left(2\pi^2+3\right)\hbar^2}{2l^2m\left(2\pi^2-3\right)}$; возможные результаты измерения энергии: $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$, $E_{2k} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}4k^2$, $k \ge 1$; вероятности $P_1 = \dfrac{3\pi^2}{4\pi^2-6} \simeq 0.884$; $P_{2k} = \dfrac{768k^2}{\pi^2\left(4k^2-1\right)^4\left(2\pi^2-3\right)}$; состояние частицы не является стационарным.

Задача 11. В момент времени $t = t_0$ волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками равна

$$\psi(x) = Ax\cos\frac{\pi x}{2l}.$$

Найти волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$, средние значения энергии и координаты частицы, возможные результаты измерения энергии и вероятности их получения, а также вероятность обнаружения частицы в n – м возбужденном состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

Ответ: $\Psi(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{32n\sqrt{3}\cos\pi n}{\pi(4\pi-1)^2\sqrt{\pi^2-6}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}$; $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$;

$P_n = \frac{3072n^2}{\pi^2(4n^2-1)^4(\pi^2-6)}$; $\langle E\rangle = \frac{\pi^2(\pi^2+6)\hbar^2}{8l^2m(\pi^2-6)}$; $\langle x\rangle = \frac{3}{4}l\left(1-\frac{8}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2-6}\right)$; вероятность обнаружения частицы в $n-$м возбуждённом состоянии P_{n+1}; состояние частицы не стационарно.

Задача 12. В некоторый момент времени $t = t_0$ координатная часть волновой функции частицы массой m, находящейся в одномерной потенциальной яме ширины a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\sin^3\frac{\pi x}{a}.$$

Найти волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$ и вероятность пребывания частицы в первом возбужденном состоянии.

Ответ: состояние частицы является суперпозицией основного и второго возбужденного состояний, $\Psi(x,t) = \frac{3}{\sqrt{10}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$; $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$, $n = 1, 3$;

$P_1 = \frac{9}{10}$; $P_3 = \frac{1}{10}$.

Задача 13. В некоторый момент времени $t = t_0$ координатная часть волновой функции частицы массой m, находящейся в одномерной потенциальной яме ширины a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\sin^3\frac{\pi x}{a}.$$

Найти волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$ и среднее значение кинетической энергии частицы в этом состоянии.

Ответ: $\langle E\rangle = \frac{9\pi^2\hbar^2}{10a^2m}$; волновую функцию см. в ответе к предыдущей задаче.

Задача 14. В некоторый момент времени $t = t_0$ координатная часть волновой функции частицы массой m, находящейся в одномерной потенциальной яме ширины a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\left(\sin\frac{\pi x}{a} + \sin^2\frac{\pi x}{a}\right).$$

Найдите волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$, среднее значение её кинетической энергии и вероятность пребывания частицы во втором возбужденном состоянии.

Ответ:

$$\Psi(x,t) = \frac{2(3\pi+8)}{\sqrt{3\pi(21\pi+64)}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16\sqrt{3}}{(2k+1)\left\{4-(2k+1)^2\right\}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k+1}t}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a};$$

$\langle E\rangle = \dfrac{4\pi^2(3\pi+8)\hbar^2}{a^2 m(21\pi+64)}$; вероятность пребывания частицы во втором возбужденном состоянии равна $P = P_3 = \dfrac{256}{75\pi(21\pi+64)} \approx 0.008$.

Задача 15. В некоторый момент времени $t = t_0$ координатная часть волновой функции частицы массой m, находящейся в одномерной потенциальной яме ширины a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\left(2\sin\frac{\pi x}{a} + \sin^2\frac{\pi x}{a}\right).$$

Найдите волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$ и вероятность пребывания частицы в первом возбужденном состоянии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартинсон Л. К., Смирнов Е. В. Квантовая физика. — М.: МГТУ, 2006.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. Кн. 5. — М: Наука. Физматлит, 1998.
3. Матвеев А. Н. Атомная физика. — М.: Высшая школа, 1989.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том V. Атомная и ядерная физика. М.: Физматлит МФТИ, 2002.
5. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1983.
6. Иродов И. Е. Квантовая физика. Основные законы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
7. Калашников Н. П., Смондырев М. А. Основы физики, Т. 2. — М: Дрофа, 2004.
8. Шпольский Э. В. Атомная физика. Т. I: Введение в атомную физику.— М.: Наука, 1984.
9. Шпольский Э. В. Атомная физика. Т. 2: Основы квантовой механики и строение электронной оболочки атома. — М.: Наука, 1984.
10. Гольдин Л. Л., Новикова Г. И. Квантовая физика. Вводный курс. — М: Институт компьютерных исследований, 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ