Лекция 10. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Закон полного тока. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

Закон электромагнитной индукции Фарадея $\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}\iint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ или $rot\left(\vec{E}_{CT}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ свидетельствует о том, что изменение магнитного поля приводит к появлению сторонних сил в проводнике, действующие на носители тока. Как показывает пример с проводником, поступательно движущимся в магнитном поле, эти сторонние силы аналогичны силам, действующим на электрические заряды со стороны электрического поля. Поле этих сил является вихревым, поэтому его называют *вихревым электрическим* полем.

Первая гипотеза Максвелла состоит в том, что появление вихревого электрического поля из-за изменяющегося во времени магнитного поля в некоторой области пространства, не зависит от наличия в этой области проводника или носителей тока. При этом электрическое поле в любой области пространства является *суперпозицией* электростатического (кулоновского) поля (с напряжённостью $\vec{E}_q$), создаваемого электрическими зарядами, и вихревого электрического полей (с напряжённостью $\vec{E}_B$), создаваемого переменным магнитным полем. Напряженность суммарного электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$. Найдем дивергенцию суммарного электрического поля. Т.к. $div\left(\vec{E}_q\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ и $div\left(\vec{E}_B\right) = 0$, то $div\left(\vec{E}\right) = div\left(\vec{E}_q\right) + div\left(\vec{E}_B\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Из $\vec{E}_q = -grad\left(\varphi\right)$ и $rot\left(\vec{E}_q\right) = rot\left(-grad\left(\varphi\right)\right) = \vec{0}$ следует равенство

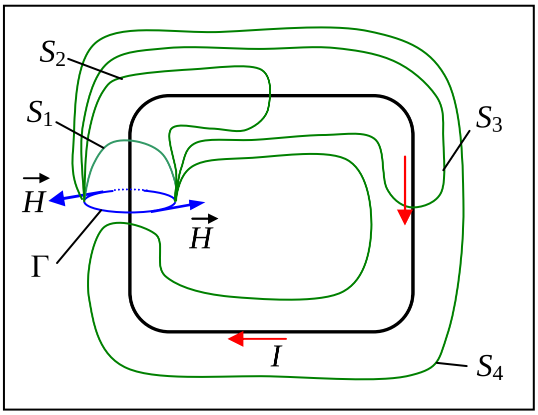
$$rot\left(\vec{E}\right) = rot\left(\vec{E}_q\right) + rot\left(\vec{E}_B\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ток смещения.

Теорема о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля имеет вид $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$.

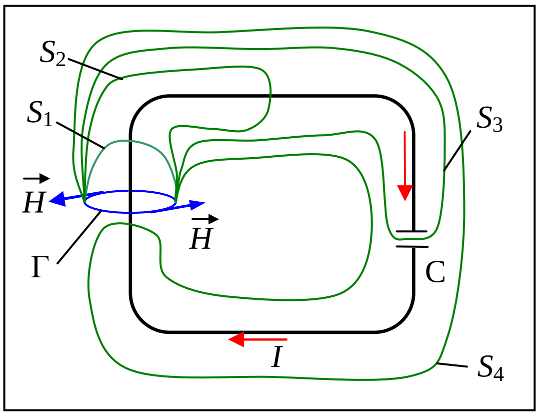
Применим к обеим частям дивергенцию $div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = div\left(\vec{j}\right)$. Левая часть равна нулю $div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = 0$, но правая $div\left(\vec{j}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (уравнение непрерывности электрического заряда).

Откуда следует $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, т.е. объемная плотность заряда не зависит от времени. Следовательно, равенство $rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}$ применимо для случая, когда $div\left(\vec{j}\right)=0$. В этом случае векторное поле плотности тока $\vec{j}$ является вихревым, поэтому линии тока замкнутые. Рассмотрим теорему о циркуляции вектора напряженности вдоль замкнутого проводника, в котором течёт постоянный ток: $\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=I$. Линии тока в этом случае замкнутые, поэтому если взять несколько поверхностей S_1, S_2, S_3, S_4 имеющих вид мешков, общим горлом которых является контур Г, то должно выполняться равенство



$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\iint\limits_{S_1}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_2}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_3}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_4}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=I$$

т.к. сила тока в любом сечении проводника одинаковая.



Теперь поместим в цепь конденсатор С. Пусть по цепи протекает постоянный ток. Поверхность S_3 проведём таким образом, чтобы она охватывала одну из обкладок конденсатора. Так как в конденсаторе нет тока проводимости, то $\iint\limits_{S_3}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=0$,

но по-прежнему

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\iint\limits_{S_1}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_2}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_4}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=I.$$

Но расположение конденсатора можно поменять, так, чтобы одна его обкладка находилась внутри поверхности не S_3, а например, S_2. Тогда получим равенства $\iint\limits_{S_2}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=0$ и

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\iint\limits_{S_1}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_3}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{S_4}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=I.$$

Получаем *противоречие* – циркуляция векторного поля по контуру Г, не охватывающему участок цепи с конденсатором, зависит от произвольного выбора места расположения конденсатора. Чтобы снять это противоречие Максвелл выдвинул (вторую) гипотезу о том, что наряду с током проводимости существует *ток смещения*, который также создаёт магнитное поле. *Плотность тока смещения* задаётся скоростью изменения вектора электрического смещения

$$\vec{j}_{CM}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Плотность полного тока – векторная сумма плотности тока проводимости и плотности тока смещения

$$\vec{j}_{ПОЛН} = \vec{j}_{ПРОВ} + \vec{j}_{СМ}.$$

Найдём дивергенцию вектора плотности полного тока. Учтём закон сохранения электрического заряда $div\left(\vec{j}_{ПРОВ}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и теорему Гаусса для вектора смещения $div\left(\vec{D}\right) = \rho$:

$$div\left(\vec{j}_{ПОЛН}\right) = div\left(\vec{j}_{ПРОВ}\right) + div\left(\vec{j}_{СМ}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\left(\vec{D}\right)\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, векторное поле плотности *полного* тока не имеет источников, т.е. является вихревым, следовательно, силовые линии полного тока являются замкнутыми.

В частном случае, когда по замкнутой цепи течёт постоянный ток, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, откуда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(div\left(\vec{D}\right)\right) = div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = div\left(\vec{j}_{СМ}\right) = 0.$$

Т.к. цепь замкнутая, то не происходит накапливания электрического заряда ни в одной точке цепи с течением времени и поэтому можно считать, что вдоль цепи $\vec{D} = const$. Поэтому нет тока смещения $\vec{j}_{СМ} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$ и $\vec{j}_{ПОЛН} = \vec{j}_{ПРОВ}$.

Если цепь содержит конденсатор, то между обкладками отсутствует ток проводимости. Поэтому силовая линия тока проводимости имеет разрыв на обкладках конденсатора – т.е. на обкладках имеются стоки и источники поля векторов плотности тока проводимости $div\left(\vec{j}_{ПРОВ}\right) \neq 0$.

Из уравнения непрерывности для тока $div\left(\vec{j}_{ПРОВ}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ следует, что источниками (и стоками) электрического тока в цепи является изменяющаяся во времени плотность электрических зарядов на обкладках. Но в то же самое время, изменение электрического заряда на обкладках служит стоком и источником плотности тока смещения в пространстве между обкладками

$$div\left(\vec{j}_{СМ}\right) = div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(div\left(\vec{D}\right)\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Т.е. из-за изменения электрического заряда конденсатора (во времени) векторное поле смещения в пространстве между обкладками будет меняться во времени, что приведёт к появлению тока смещения в пространстве между обкладками конденсатора. Поэтому между обкладками конденсатора $\vec{j}_{ПОЛН} = \vec{j}_{СМ}$.

Так как сила тока проводимости (с учётом знака) равна потоку вектора плотности тока проводимости через ориентированную поверхность $I = \iint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$, то, аналогично, можно определить силу тока смещения (с учётом знака) через ориентированную поверхность

$$I_{CM} = \iint_S \left(\vec{j}_{CM}, d\vec{S}\right) = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S}\right).$$

Если поверхность S неподвижная, то $I_{CM} = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S}\right) = \frac{d}{dt}\iint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$.

Закон полного тока: сила полного тока равна сумме тока проводимости и тока смещения.

Вывод. Если в теореме о циркуляции для напряженности магнитного поля ток проводимости заменить на полный ток, то противоречие будет снято:

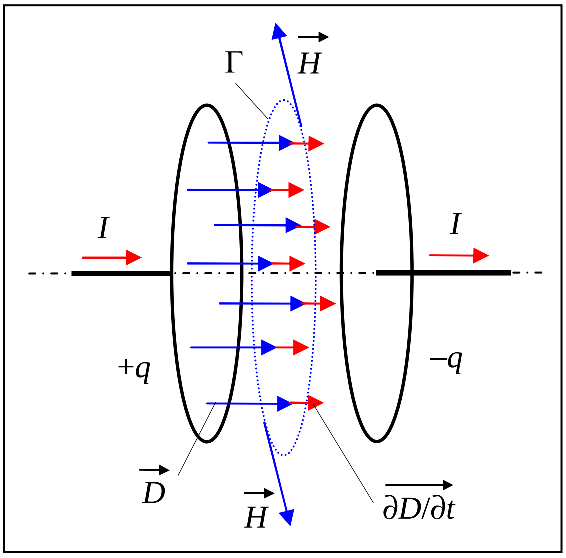
$$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}_{ПОЛН} = \vec{j}_{ПРОВ} + \vec{j}_{СМЕЩ}, \; rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Или, в интегральной форме:

$$\oint_\Gamma \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = I + \frac{d}{dt}\iint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$$

- циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по любому замкнутому (ориентированному) контуру равна сумме токов проводимости и смещения через ориентированную поверхность, ограниченную этим контуром. Ориентации контура и поверхности согласованы правилом правого винта (буравчика).

Это соотношение свидетельствует о том, что магнитное поле может порождаться переменным во времени электрическим полем.



Пример. Найдем циркуляцию вектора напряжённости магнитного поля в пространстве между обкладками плоского конденсатора включённого в цепь с постоянным током.

Пусть сила тока в цепи равна I. Конденсатор плоский, обкладки – круги радиусом R. Расстояние между обкладками d много меньше R (в этом случае электрическое поле между пластинами в каждый момент времени приближённо можно считать однородным). Ток в цепи постоянный, поэтому заряды «положительной» и «отрицательной» обкладок линейно зависят от времени

$q = I \cdot t + q_0$.

Пусть $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к пластине с положительным зарядом. Между обкладками вектор смещения направлен перпендикулярно пластинам $\vec{D} = D \cdot \vec{n}$ от положительно заряжённой пластины к отрицательно заряженной. Нормальная составляющая вектора смещения равна длине вектора $D_n = D$. С другой стороны, внутри плоского конденсатора $D_n = \sigma = \dfrac{q}{S}$ ($\sigma = \dfrac{q}{S}$ - поверхностная плотность стороннего заряда, $S = \pi R^2$ - площадь обкладки конденсатора), поэтому $D = \dfrac{I \cdot t + q_0}{S}$. Найдём производную вектора смещения

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(D \cdot \vec{n}\right) = \vec{n}\frac{\partial D}{\partial t} + D\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}.$$

Но $\vec{n} = const$, поэтому $\dfrac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \vec{0}$ и вектор $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{n}\dfrac{\partial D}{\partial t}$ тоже направлен перпендикулярно пластинам.

Пусть в рассматриваемом случае заряд положительной пластины увеличивается, тогда $\dfrac{\partial D}{\partial t} > 0$ и векторы $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и $\vec{D}$ направлены одинаково. Поле между пластинами обладает осевой симметрией, поэтому найдём циркуляцию по контуру Г, который является окружностью в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, с центром на оси симметрии. Пусть радиус окружности равен *r*.

Контур ограничивает плоский круг *S*, на котором можно ввести ориентацию, совпадающую по направлению с направлением вектора смещения $\vec{D}$. Поток этого векторного поля через поверхность круга равен $\Phi_D = \iint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = D\pi r^2$. Поэтому сила тока смещения

$$I_{CM} = \frac{d}{dt}\iint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = \frac{d}{dt}\left(D\pi r^2\right) = \pi r^2 \frac{dD}{dt} = \pi r^2 \frac{I}{S} = I\frac{r^2}{R^2}.$$

Силовые линии магнитного поля являются окружностями, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, центры окружностей находятся на этой оси. Поэтому выбранный контур Г совпадает с какой-то силовой линией и вектор напряжённости магнитного поля направлен по касательной к Г, его величина зависит только от радиуса окружности *r*. Ориентацию на Г согласуем с направлением векторного поля $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Так как в рассматриваемом случае векторы $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и $\vec{D}$ направлены одинаково, то направления касательных векторов $\vec{H}$ и $d\vec{l}$ совпадают, поэтому

$$\oint\limits_{\Gamma} \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \oint\limits_{\Gamma} H dl = H 2\pi r.$$

Ток проводимости между обкладками конденсатора отсутствует (*I*=0), поэтому

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\frac{d}{dt}\iint_{S}\left(\vec{D},d\vec{S}\right).$$

Тогда $H2\pi r=I\frac{r^2}{R^2}$, откуда $H=\frac{Ir}{2\pi R^2}$. В частности, при $r=R$ получаем $H=\frac{I}{2\pi R}$ - такое же значение, как если бы между обкладками конденсатора протекал ток проводимости силой I.♣

Уравнения Максвелла

Гипотезы Максвелла позволяют записать систему уравнений электромагнитного поля.

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
Теорема Гаусса для электрического поля	$div\vec{D}=\rho$	$\oint\!\!\oint_{S}\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=q_{\Sigma}$
Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея) (теорема о циркуляции вектора напряжённости электрического поля)	$rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=-\frac{d}{dt}\iint_{S}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$
Теорема Гаусса для магнитного поля	$div\vec{B}=0$	$\oint\!\!\oint_{S}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0$
Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля	$rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=I_{\Sigma}+\frac{d}{dt}\iint_{S}\left(\vec{D},d\vec{S}\right)$

В материальной среде эти системы дополняются уравнениями (*материальные уравнения*)

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
Закон Ома	$\vec{j}=\gamma\cdot\left(\vec{E}+\vec{E}_{CT}\right)$	$I\cdot R=\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_{12}$
Закон сохранения электрического заряда	$div\left(\vec{j}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$	$\oint\!\!\oint_{S}\left(\vec{j},d\vec{S}\right)=-\frac{d}{dt}\iiint_{V}\rho dV$

$\vec{D}=\varepsilon_0\cdot\vec{E}+\vec{P}$, в однородном изотропном диэлектрике $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$

$\vec{B}=\mu_0\cdot\left(\vec{H}+\vec{J}\right)$, в однородном, изотропном магнетике $\vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}$.

Условия на границе раздела сред $D_{2n}-D_{1n}=\sigma$, $E_{1t}=E_{2t}$, $B_{2n}=B_{1n}$, $H_{2t}-H_{1t}=i$.

Данная система уравнений в дифференциальной форме содержит 15 координат векторов $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{j}$ и функцию ρ - объёмной плотности электрического заряда – итого 16 переменных. Количество уравнений Максвелла в координатной форме равно 8, материальных уравнений – 10, итого 18 уравнений. При этом некоторые уравнения могут быть следствием других в данной системе.

Кроме того, необходимо добавить начальное распределение зарядов (токов) и значения неизвестных параметров на границе рассматриваемой области.

В общем случае, нахождение характеристик электромагнитного поля является достаточно трудоёмкой задачей.

Оператор «набла».

Введем оператор, обозначаемый $\vec{\nabla}$, который сопоставляет функции её градиент

$\vec{\nabla} f \mapsto grad(f)$ или в декартовых координатах $\vec{\nabla} f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Если ввести векторы-орты декартовой системы координат $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, то это соответствие можно записать в виде равенства $\vec{\nabla} f = \vec{e}_X \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_Y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_Z \frac{\partial f}{\partial z}$.

Поэтому для оператора «набла» используют обозначение в виде вектора

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_X \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_Y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_Z \frac{\partial}{\partial z}$$

с условием, что он действует на функцию *только слева*.

Если в некоторой области задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$, то с помощью этого обозначения оператора «набла» дивергенция векторного поля записывается как скалярное произведение $\left(\vec{\nabla}, \vec{a}\right) = div(\vec{a})$, а ротор векторного поля – как векторное произведение $\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = rot(\vec{a})$. Эти обозначения удобны тем, что соотношения векторного анализа $div\left(rot(\vec{a})\right) = 0$ и $rot\left(grad(f)\right) = \vec{0}$ становятся более наглядными. Действительно,

$$div\left(rot(\vec{a})\right) = \left(\vec{\nabla}, \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_X & a_Y & a_Z \end{vmatrix} = 0$$

т.к. в этом определителе две одинаковые строки.

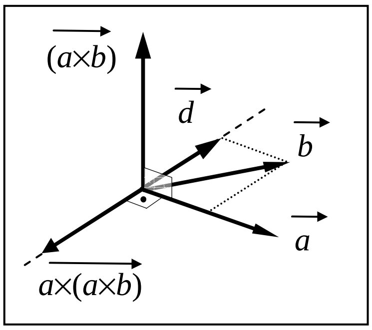
$$rot\left(grad(f)\right) = \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right)\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\right) f = \vec{0}$$

т.к. векторное произведение вектора на себя равно нулю.

Квадрат оператора набла равен оператору Лапласа $\vec{\nabla}^2 = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right) = \Delta$.

Действительно $\left(\vec{\nabla}, \left(\vec{\nabla} f\right)\right) = div\left(grad(f)\right) = \Delta f$.

Пример. Рассмотрим двойное векторное произведение $\left(\vec{a} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)\vec{a} - (\vec{a}, \vec{a})\vec{b}$.



Чтобы его обосновать, введем вектор $\vec{d}=\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}$, который обладает следующими свойствами:

1) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}$: $(\vec{d},\vec{a})=(\vec{b},\vec{a})-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}(\vec{a},\vec{a})=0$;

2) при замене вектора $\vec{b}$ на $\vec{d}$ векторное произведение не меняется

$$\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}\right)\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}(\vec{a}\times\vec{a})=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),$$

поэтому вектор $\vec{d}$ перпендикулярен также и вектору $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. Т.к. вектор $\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)$ тоже перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, то он должен быть пропорциональным вектору $\vec{d}$, т.е. $\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)=\lambda\cdot\vec{d}$ (где λ - число). Но так как он направлен противоположно вектору $\vec{d}$, то $\lambda<0$.

Теперь воспользуемся векторным равенством $\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)=\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)\right)$ (вытекающим из второго свойства вектора $\vec{d}$):

$$\left|\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right|=\left|\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)\right)\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|=(\vec{a},\vec{a})\cdot\left|\vec{d}\right|.$$

С другой стороны, $\left|\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{d}\right|$, откуда $(\vec{a},\vec{a})\cdot\left|\vec{d}\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{d}\right|$ или $|\lambda|=(\vec{a},\vec{a})$.

С учётом знака $\lambda=-(\vec{a},\vec{a})$. Окончательно,

$$\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)=\lambda\cdot\vec{d}=-(\vec{a},\vec{a})\left(\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{a}-(\vec{a},\vec{a})\vec{b}.$$

Следовательно, для непрерывно-дифференцируемого векторного поля $\vec{v}$ (с учётом правил применения оператора «набла»)

$$rot\left(rot\left(\vec{v}\right)\right)=\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{v}\right)-\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{v}=grad\left(div\left(\vec{v}\right)\right)-\Delta\vec{v}\;.\clubsuit$$

Уравнения Максвелла, записанные с помощью оператора «набла» примут вид (в дифференциальной форме)

$$\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=\rho,\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)=0,\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$