Множества Делоне
с транзитивной группой

Н. П. Долбилин*

Для описания атомной структуры твердого тела адекватной моделью является множество Делоне. Точечное множество $X \subset \mathbb{R}^d$ называется *множеством Делоне*, если для некоторых положительных r и R выполняются два условия:
(r-условие) открытый d-мерный шар $B_y(r)$ радиуса r с центром в произвольной точке $y \in \mathbb{R}^d$ содержит *не больше одной* точки из X;
(R-условие) замкнутый d-мерный шар $B_y(R)$ радиуса R с произвольным центром y содержит *хотя бы одну* точку из X.

Для описания высокоорганизованных структур, которые присутствуют в кристаллах, используются множества Делоне особого типа, т.н. *правильные системы.* Правильная система – это множество Делоне X, в котором для любых точек x и x' из X найдется движение g пространства, такое что $g(x) = x'$ и $g(X) = X$. Другими словами, группа симметрий правильной системы транзитивна.

Переход аморфной структуры в чрезвычайно симметричную структуру, которая наблюдается в кристалле, физики объясняют тем, что при кристаллизации атомы данного сорта окружают себя одинаково в пределах некоторого радиуса. Действительно, каждый атом окружается другими атомами, образующими кластер некоторого радиуса с минимальной внутренней энергией. Естественно ожидать, что у атомов одного вида эти кластеры, минимизирующие внутреннюю энергию, конгруэнтны. Предположение о том, что из попарной конгруэнтности кластеров **некоторого** радиуса во множестве Делоне должна следовать правильность, т.е. попарная конгруэнтность кластеров **любого** данного радиуса, не было результатов в этой области, вплоть до первых работ, выполненных в отделе геометрии МИАН еще в 1970-е гг. Более того, открытие квазикристаллических структур (Пенроуз, Шехтман - Нобелевская премия) показало, что связь между 'ближним' и 'дальним' порядком не столь однозначна.

Одна из основных целей локальной теории правильных систем – строгий вывод из попарной конгруэнтности кластеров **некоторого** радиуса во множестве Делоне X **существование** транзитивной группы симметрий множества X. Следующая задача – оценить радиус кластеров, попарная конгруэнтность которых обеспечивает правильность множества.

Итак, локальная теория связана с попыткой объяснить в геометрических терминах, почему при переходе от жидкой к твердой фазе атомная структура перестраивается из аморфной в высокоорганизованную с богатой группой симметрий.

Предполагается обсудить основные результаты локальной теории правильных систем, в том числе недавний прогресс в этой области.

*доктор физ.-мат. наук, вед.научный сотрудник отдела геометрии и топологии МИАН им.В.А.Стеклова РАН, профессор мех.-мата МГУ.